Probabilità e Statistica
Compito intermedio
Giugno 2005

SOLUZIONE

Cognome e Nome

Esercizio 1:

Nello scaricare un file di dimensioni maggiori di 10MB, la probabilità che si verifichi un errore è dello 0.8%.

1. Calcolare la probabilità che, su 10 file scaricati di dimensione maggiore di 10MB, ce ne sia al massimo 1 che presenta errori.

$p = 0,0008$

$X \sim \mathcal{B}(10, p)$

$\mathbb{P}(X \le 1) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)$

$\mathbb{P}(X=0) = \binom{10}{0}(0,0008)^0(1-0,0008)^{10}$

$\mathbb{P}(X=1) = \binom{10}{1}(0,0008)^1(1-0,0008)^9$

2

2. Se si scaricano 4000 files, quale è il numero medio di files corrotti ?

$X \sim \mathcal{B}(4000, 0,0008)$

$\mathbb{E}(X) = np = 3.2$

2

3. Se si scaricano 4000 files,come si può calcolare la probabilità di avere al massimo 25 files corrotti ?

$\frac{X_1 + \cdots + X_{4000} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1) \Rightarrow \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{4000} < 25) = \mathbb{P}\left(Z \le \frac{25 - 3,2}{\sqrt{4000\,p(1-p)}}\right) = \ldots$

2

Esercizio 2:

La variabile aleatoria discreta X modella il numero di lavatrici che un negozio di elettrodomestici vende in un giorno.La legge di X è riportata in tabella :

X	0	1	2	3	4
f(x)	K	3k	2k	K	0

$K = \frac{1}{7}$

1. Determinare il valore di k in modo che f(x) possa essere la densità di probabilità di X. 1
2. Determinare Var(X).

$\mathbb{E}(X) = 10/7$

$VAR(X) = \sum x_i^2 p(x_i) - \bar{x}^2 = \frac{20}{7} - \left(\frac{10}{7}\right)^2 = \frac{40}{49}$

2

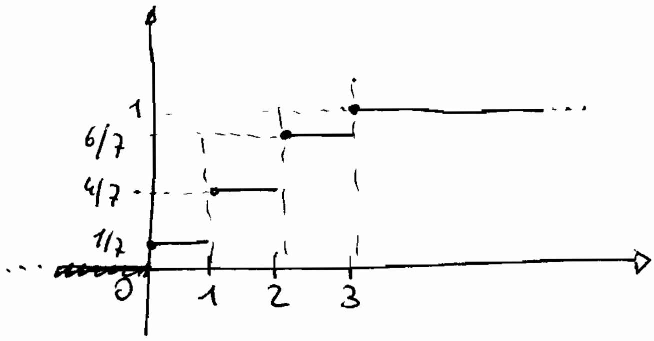
3. Calcolare la P(X<2)

$\mathbb{P}(X<2) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

2

4. Scrivere l'espressione della funzione di distribuzione cumulata di X e disegnarne il grafico.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{7} & x \in [0, 1] \\ \frac{4}{7} & x \in [1, 2) \\ \frac{6}{7} & x \in [2, 3) \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$



2

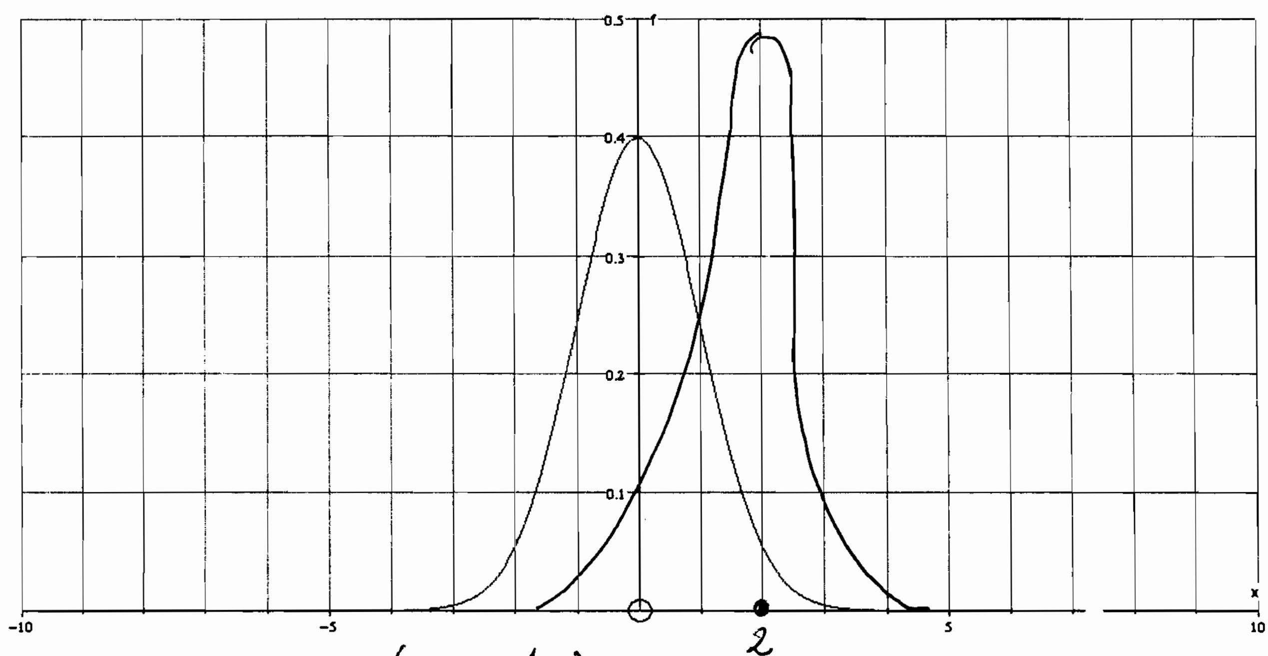
5. Determinare una nuova densità g(x) per X, affinché X abbia media maggiore rispetto a quella relativa alla densità f(x).

X	1	2	3	4
g(x)	0	0	0	1

1

Esercizio 3:

1. Scegliere una variabile aleatoria T con legge normale, media maggiore e varianza minore rispetto a quelle di Z~N(0,1). Disegnare grafico della legge di T [il grafico presente rappresenta Z~N(0,1)]



$T \sim N\left(2, \frac{1}{2}\right)$

$T \sim N(2, \frac{1}{2})$

2. Scelta T dal punto 1., calcolare P(T>0).

$$\mathbb{P}(T>0) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{0-2}{1/2}\right) = \mathbb{P}(Z > 4) \cong 0$$

1

3. Scelta T dal punto 1., determinare k, tale che P(T>k)=0.90

$$\mathbb{P}(T>K) = 0{,}90 \qquad \frac{K-2}{0{,}5} = 1{,}29 \Rightarrow K = \frac{1{,}29}{2} + 2 = \underline{2{,}65}$$

$$\mathbb{P}\left(Z > \frac{K-2}{0{,}5}\right) = 0{,}9$$

1

4. Se T e Z sono indipendenti, che legge ha la variabile aleatoria 2T-5Z?

$T \sim N(2, 1/2)$
$Z \sim N(0,1)$

$$2T - 5Z \sim N(4-0, 2+25)$$

1

<u>Esercizi 4:</u>

Si consideri il seguente campione estratto da una popolazione di media incognita e varianza uguale a 9.

16.6	13.9	15.4	19.8	18.1	21.7	18.3	14.4

1. Costruire un intervallo di confidenza per la media a livello di significatività del 95%.

$\bar{x}_8 = 17{,}275$

$$I_{95\%} = \left(17{,}275 - 1{,}96 \frac{3}{\sqrt{8}} \,,\, 17{,}275 + 1{,}96 \frac{3}{\sqrt{8}}\right) \cong (15{,}2 \,;\, 19{,}4)$$

2. Costruire un intervallo di confidenza per la media a livello di significatività del 70%.

Come sopra, sostituendo e $(1-\alpha = 0{,}7 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}85)$

$$z_{0{,}975} = 1{,}96 \longrightarrow z_{0{,}85} = 1{,}04$$

$A = 1{,}1$

3. Quale livello di confidenza si dovrebbe scegliere per avere un intervallo dimezzato, a parità di varianza e livello di confidenza del punto precedente?

$$A = 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 \cdot 1{,}04 \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{n}} = 0{,}55$$

$$\sqrt{n} = \frac{2 \cdot 1{,}04 \cdot 3}{0{,}55} \Rightarrow n \cong 129$$

(n)

4. A livello di confidenza del 95%, determinare la numerosità campionaria in modo che l'intervallo di confidenza abbia ampiezza uguale a 1.

$$A = 2 \cdot 1{,}96 \frac{3}{\sqrt{n}} = 1$$

$$\sqrt{n} = 2 \cdot 1{,}96 \cdot 3 = 11{,}76$$

$$n \cong 138$$

1

Esercizio 5:

Si consideri un campione di 16 elementi estratto da una popolazione su cui è definita una variabile casuale di media sconosciuta e varianza uguale a 36. Si vuole effettuare un test a livello dell'1% per determinare se la media della variabile casuale è 42, control'alternativa che sia minore di 40. Si conosce $\bar{x}_{16}$ =40,7.

1. Si descrivano l'ipotesi principale H_0 e l'ipotesi alternativa H_1.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 42 \\ H_1 : \mu < 42 \end{cases}$$

2. Effettuare il test esplicitando se si accetta o rifiuta l'ipotesi.

$$R = \left(-\infty, 42 - z_{0,990} \sqrt{\frac{36}{16}}\right) = (-\infty, 38{,}50)$$

$40{,}7 \notin R \Rightarrow$ non si rifiuta H_0

3. Si ottiene lo stesso risultato se l'ipotesi alternativa è $H_1 \neq 40$?

$$R = \left(-\infty, 42 - z_{0,995} \frac{6}{4}\right) \cup \left(42 + z_{0,995} \frac{6}{4}, +\infty\right)$$

4. Come varia la regione di rifiuto (calcolata nel punto 2.), se il livello del test è del 5%?

$$R = \left(-\infty, 42 - z_{0,95} \frac{6}{4}\right) = \left(-\infty, 42 - 1.65 \cdot \frac{3}{2}\right) =$$

$= (-\infty, 39.525)$ $\quad \bar{x}_{16} \notin R \Rightarrow$ non si rifiuta H_0

Esercizio 6: **6**

I pesi di 50 studenti sono state misurati e i dati cosi raggrupati:

peso (kg)	55-65	66-78	79-95	tot
Freq. Ass.	24	20	6	50

Effettuare un test per verificare se il peso si può ritenere distribuito con legge riportata nella tabella sotto a livello 5%.

peso (kg)	55-65	66-78	79-95	tot
p(x)	0.50	0.30	0.20	1

Tabelle freq. attese

peso	55-65	66-78	79-95	tot
freq att.	25	15	10	50

$$C = \frac{(25-24)^2}{25} + \frac{(15-20)^2}{15} + \frac{(10-6)^2}{10} =$$

$$= \frac{1}{25} + \frac{25}{15} + \frac{16}{10} \cong 3,31$$

GRADI DI LIBERTA: 2

$$\chi^2_{0,05}(2) = 5.991$$

$C < \chi^2_{0.05}(2) \Rightarrow$ si accetta l'ipotesi che il peso abbia la distribuzione riportata in tabella.