Probabilità e Statistica
II Compito intermedio
Giugno 2005

SOLUZIONE

Cognome e Nome

Esercizio 1:

Consideriamo 10 estrazioni con reinserimento di una pallina da un'urna contenente 20 palline numerate da 1 a 20.

1. Qual'è la probabilità che siano estratte esattamente 3 palline con un numero maggiore o uguale a 15?

$X \sim \mathcal{B}(10, \frac{6}{20})$

$\mathbb{P}(X=3) = \binom{10}{3} \left(\frac{6}{20}\right)^3 \left(\frac{14}{20}\right)^7 = 120 \cdot 0.027 \cdot 0.082 \cong 0.267$

2

2. Qual è la probabilità che la pallina con il numero 3 sia estratta almeno 5 volte?

$Y \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{20})$

$\mathbb{P}(X \geq 5) = \mathbb{P}(X=5) + \dots + \mathbb{P}(X=10)$

2

3. Qual è il numero medio di palline dispari estratte?

$T \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$

$\mathbb{E}(T) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$

2

Esercizio 2:

Si consideri la tabella relativa alla funzione di distribuzione cumulata F(x) della variabile aleatoria discreta X.

X	<-1	-1	0	1	2	>2
F(x)	0	0.2	0.4	0.8	1	1

1. Completare la tabella in modo che F(x) possa essere la funzione di distribuzione cumulata di X. 1
2. Ricavare dal punto 1. la funzione di densità f(x) di X.

X	<-1	-1	0	1	2	>2
f(x)	0	0.2	0.2	0.4	0.2	

2

3. Determinare la E[X].

$\mathbb{E}(X) = (-1) \cdot 0.2 + (0) \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.2 = 0.6$

1

4. Calcolare P(-2<X<1)

$\mathbb{P}(-2 < X < 1) = \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=0) = 0.4$

2

5. Data Y=-X+2, calcolare la varianza di Y.

$VAR(Y) = VAR(-X+2) = VAR(-X) = VAR(X)$

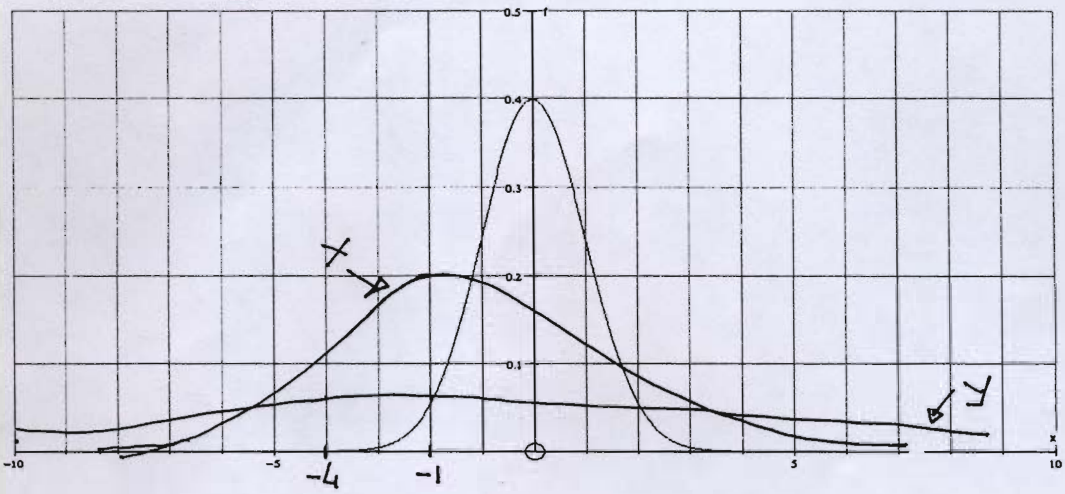
$VAR(X) = \sum x_i^2 \cdot p(x_i) - \mathbb{E}(X)^2 = 1.04$

1

Esercizio 3:

Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti : X~N(-1,4) e Y=3X-1. $Y \sim N(-4, 36)$

1. Disegnare sugli stessi assi il grafico della legge di X e di Y [il grafico presente rappresenta Z~N(0,1)]



1

2. Calcolare P(X>0).

$X \sim N(-1, 4)$

$\mathbb{P}(X>0) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{0+1}{2}\right) = \mathbb{P}(Z \geq 0{,}5) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0{,}5) = 1 - 0.6915 = 0{,}3085$

1

3. Determinare k, tale che P(-2<Y<k)=0.25 $Y \sim N(-4, 36)$

$Y \sim N($

$\mathbb{P}\left(\frac{-2+4}{6} \leq Z \leq \frac{k+4}{6}\right) = 0{,}25$

$\frac{k+6}{6} = 1.19$

$k = 6 \cdot 1.19 - 6 = 1.14$

$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{k+4}{6}\right) = 0{,}25 + \mathbb{P}(Z \leq 0{,}34) = 0{,}25 + 0{,}6331 = 0{,}8831$

1

4. Che legge ha la variabile aleatoria X-Y?

$X - Y \sim N(3, 40) = N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X + \sigma_Y)$

X e Y indipendenti

1

$Y \sim N(-4, 36)$

$\boxed{Y = 3X - 1}$ $VAR(Y) = 9\, VAR(X)$

Esercizi 4:

Si vogliono effettuare stime per la quantità X di sostanza attiva in una unità di un certo farmaco (espressa in mg). Si può supporre che X abbia una distribuzione normale. A tal fine si effettua un campionamento casuale di 100 unità del farmaco. Per questo campione si ottiene che $\sum_i x_i = 222{,}91$.

1. Determinare un intervallo di confidenza per la media a livello di significatività del 95%, nel caso in cui la varianza sia nota e pari a 9,1.

$$\bar{x}_{100} = \frac{\sum x_i}{100} = 2{,}2291$$

$$IdC = \left(2{,}2291 - 1{,}96\frac{\sqrt{9.1}}{10} \; ; \; 2{,}2291 + 1{,}96\frac{\sqrt{9.1}}{10}\right) = (1.6391 \; ; \; 2{,}8191)$$

2

2. Come si dovrebbe scegliere la numerosità del campione per avere un intervallo di ampiezza tripla, a parità di varianza e livello di confidenza, rispetto a quello determinato nel punto precedente?

$$A = 2 \cdot 1.96 \frac{\sqrt{9.1}}{10} = 1{,}18 \qquad 3A = 3{,}54$$

$$2 \cdot 1{,}96 \frac{\sqrt{9.1}}{\sqrt{n}} = 3{,}54 \qquad \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 1.96 \cdot \sqrt{9.1}}{3{,}54} = 3{,}34 \qquad n \cong 12$$

1

3. Come varierebbe il punto 1. se la varianza non fosse nota, ma si sapesse che $\sum_i x_i^2 = 1154.8$?

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum x_i^2 - \left[\bar{x}^2 \frac{n}{n-1}\right]^2 \cong 6.7 \quad \text{stimatore di } \sigma^2$$

$$IdC = \left(2{,}2291 - t^{99}_{0{,}05}\frac{\sqrt{6.7}}{10} \; ; 2{,}2291 + t^{99}_{0.05}\frac{\sqrt{6.7}}{10}\right)$$

$$z_{0{,}975} = 1{,}96$$

1

4. Se si effettuasse un nuovo campionamento con uguale numerosità e varianza nota, sarebbe possibile ottenere intervalli disgiunti? (motivare le risposte)

Si, è suff. che $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > 2$ ~~Ampiezza~~ Ampiezza (vedi ad esempio il punto 1)

1

Esercizio 5:

Da una popolazione di legge normale di media incognita e deviazione standard $\sigma=2$, si estrae un campione di ampiezza 10 e $\bar{x}_{10}=18.5$

1. Si effettui un test a livello del 5% per H_0: $\mu=20$ contro H_1: $\mu=18$, precisando se si rifiuta o no l'ipotesi.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu < 20 \end{cases} \quad R = \left(-\infty, \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty, 20 - 1.65 \frac{2}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$= (-\infty, 18.96)$$

R A

$\bar{x}_{10}=18.5$ 18.96

3

$\bar{x}_{10} = 18.5 \in R \Rightarrow$ rifiuto H_0 a livello 5%

2. Varia il risultato del punto precedente se si scambiano H_0 con H_1?

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 18 \\ H_1 : \mu > 18 \end{cases} \quad R = \left(18 + 1.65 \frac{2}{\sqrt{10}}, +\infty\right) = (19.04, +\infty)$$

$\bar{x}_{10} \notin R$ quindi in questo caso si accetta H_0

1

3. Varia il risultato del punto 1 se si sceglie come livello del test 1%? E il 10%?

Si possono fare i conti con i valori

$z_{0,01} = 2,23$; $z_{0.10} = 1.28$ e osservare

che $R_{1\%}$ e $R_{10\%}$ contengono $\bar{x}_{10}$ e

quindi si deve rifiutare H_0

1

6

Esercizio 6:

Le stature di 50 studenti sono state misurate e i dati cosi raggrupati:

Stature (cm)	165-168	169-172	173-176	tot
Freq. Ass.	12	20	18	50

5%

Verificare se la statura si può ritenere distribuita con legge uniforme nell'intervallo (165,176).

Stature	165-168	169-172	173-176	tot
freq. attese	16,67	16.67	16,66	50

$$C = \frac{(12-16.67)^2}{16.67} + \frac{(20-16.67)^2}{16.67} + \frac{(18-16.67)^2}{16.67} = 2.031$$

$$\chi^2_{0.05}(2) = 5,991 > C \Rightarrow \text{accetto l'ipotesi}$$

che la distribuzione sia uniforme.