Probabilità e Statistica Compito intermedio Giugno 2005	SOLUZIONE

Cognome e Nome

Esercizio 1:

Supponiamo di avere un dado A non truccato e un dado B truccato, in modo che la probabilità che esca 6 valga 0.5 e ciascuno degli altri numeri esca con probabilità 0.1.

1. Calcolare la probabilità che, lanciando il dado A 10 volte, esca 5 al più (max) due volte.

$X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{6})$

$\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) \cong 0{,}6$ **2**

2. Calcolare la probabilità che, lanciando B 10 volte, esca un numero pari solo una volta.

$X \sim \mathcal{B}(10, 0.7)$

$\mathbb{P}(X=1) = 0{,}00014$ **2**

3. Calcolare la probabilità che lanciando 2 volte sia A che B, esca sempre un numero maggiore o uguale a 5.

$p = \mathbb{P}(X=2) \cdot \mathbb{P}(Y=2)$ **2**

$X \sim \mathcal{B}(2, \frac{2}{6}) \quad Y \sim \mathcal{B}(2, \frac{6}{10})$

Esercizio 2:

Si consideri la tabella relativa alla variabile aleatoria discreta X.

X	1	2	3	4
f(x)	0.2	0.4	0.1	0,3

1. Completare la tabella in modo che f(x) possa essere la densità di probabilità di X. **1**
2. Determinare Var(X).

$E(X) = (1)\,0{,}2 + 2\,(0{,}4) + 3\,(0{,}1) + 4\,(0{,}3) = 0{,}2 + 0{,}8 + 0{,}1 + 1{,}2 = 2{,}3$

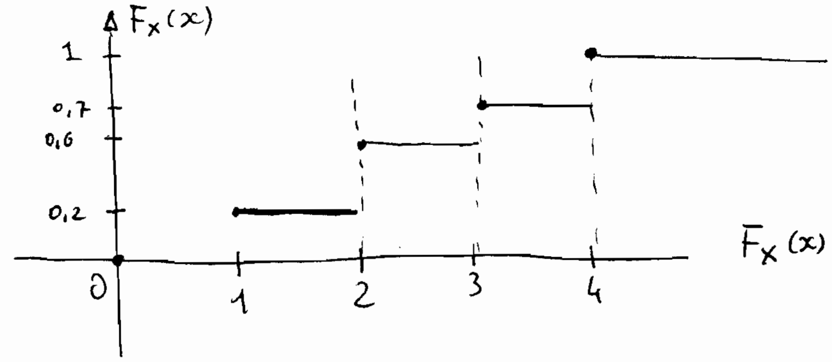
$VAR(X) = (1)\,0{,}2 + (4)(0{,}4) + 9\,(0{,}1) + 4\,(0{,}3) - (2{,}3)^2 = 1{,}25$ **1**

3. Data Y=2X-1, calcolare la P(Y>3)

$Y = 2X - 1$

$\mathbb{P}(Y > 3) = \mathbb{P}(2X - 1 > 3) = \mathbb{P}\left(X > \frac{4}{2} = 2\right) = 0{,}4$ **2**

4. Disegnare il grafico della funzione di distribuzione cumulata di X



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,2 & x \in [1,2) \\ 0,6 & x \in [2,3) \\ 0,7 & x \in [3,4) \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

2

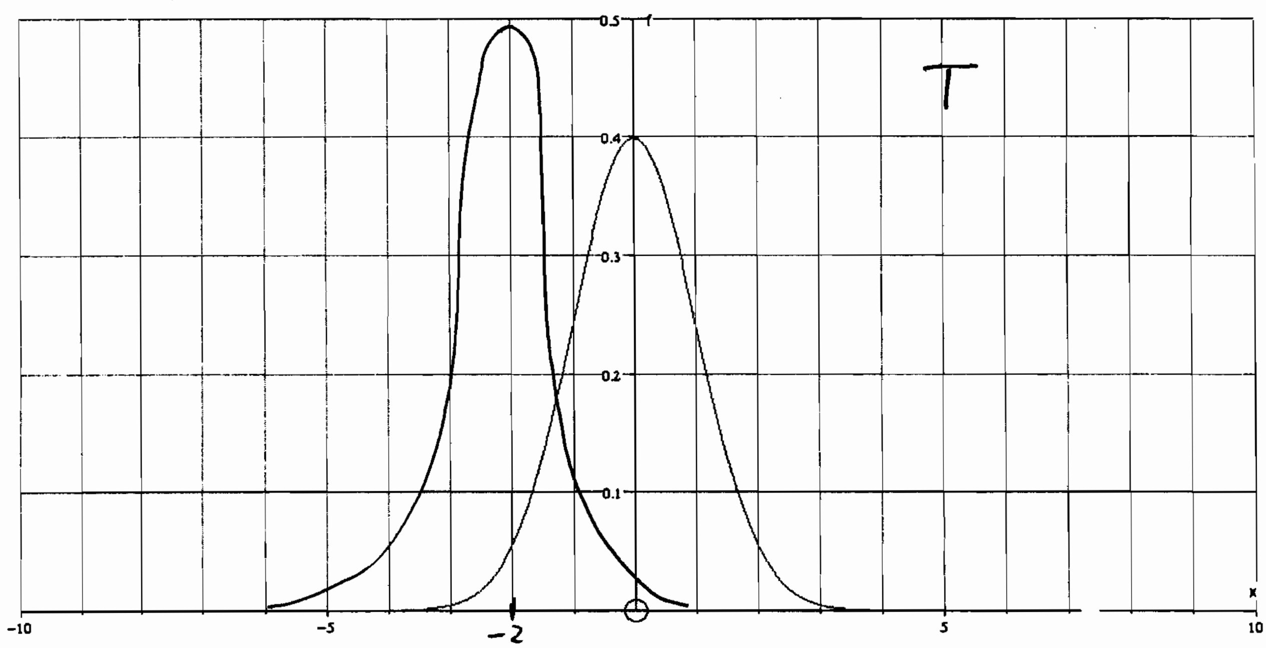
5. Determinare una nuova densità g(x) per X, affinché X abbia speranza maggiore rispetto a quella relativa alla densità f(x).

X	1	2	3	4
g(x)	0	0	0	1

1

Esercizio 3:

1. Scegliere una variabile aleatoria T con legge normale, media e varianza minori rispetto a quelle di Z ~ N(0,1). Disegnare grafico della legge di T [il grafico presente rappresenta Z~N(0,1)]



$T \sim N\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

1

2. Scelta T dal punto 1., calcolare P(T>0).

$\mathbb{P}(T>0) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{0+2}{1/2}\right) = \mathbb{P}(Z>4) = 1$

1

3. Scelta T dal punto 1., determinare k, tale che P(T>k)=0.95

• $\mathbb{P}(T>k)=0{,}95$	• $1.65=\frac{k+2}{1/2}$
• $\mathbb{P}\left(Z>\frac{k+2}{1/2}\right)=0{,}95$	• $k=\frac{1{,}65}{2}-2=-1{,}175$

1

4. Se T e Z sono indipendenti, che legge ha la variabile aleatoria T-2Z ?

$T-2Z \sim N\left(-4, \frac{1}{2}+2\right)$

1

Esercizi 4:

Un ispettore vuole stimare il peso medio del contenuto in una partita di barattoli di conserve di 450g. Ispeziona perciò un campione di 20 barattoli. La media campionaria è $\bar{x}_{20}$ =447g e la deviazione standard del campione è s_{20}=9g.

1. Costruire un intervallo di confidenza per la media a livello di significatività del 99%.

$$IdC=\left(447-t^{19}_{0{,}005}\frac{9}{\sqrt{20}}, 447+t^{19}_{0{,}05}\frac{9}{\sqrt{20}}\right)=$$
$$=(447-5{,}76, 447+5{,}76)=(441{,}24, 452{,}76)$$

2. Quale ~~livello di confidenza~~ valore di n si dovrebbe scegliere per avere un intervallo dimezzato, a parità di varianza e livello di confidenza del punto precedente?

AMPIEZZA $=2\cdot 5{,}76=11{,}52$

$A/2=5{,}76 \qquad t^{19}_{0{,}005}\frac{9}{\sqrt{n}}=5{,}76 \longrightarrow n\cong 4{,}5=5$

3. A parità di livello di confidenza, si potrebbe dire qualcosa sull'ampiezza dell'intervallo, se la varianza fosse nota (σ=9)? (motivare le risposte)

Basta, ad esempio, confrontare

$z_{0{,}995}=2{,}58 \quad e \quad t^{19}_{0{,}005}=2{,}8609$

e osservare che se σ è noto l'intervallo (a parità di $1-\alpha$) è di ampiezza minore.

Esercizio 5:

Si consideri un campione di 36 elementi estratto da una popolazione su cui è definita una variabile casuale di media sconosciuta e varianza uguale a 16. Si vuole effettuare un test a livello del 5% per determinare se la media della variabile casule è 40, contro alternativa che sia 42. Si conosce $\bar{x}_{36}$ =40,7.

1. Si descrivano l'ipotesi principale H_0 e l'ipotesi alternativa H_1.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 40 \\ H_1 : \mu > 40 \end{cases}$$

2. Effettuare il test esplicitando se si accetta o rifiuta l'ipotesi.

$$R = \left(40 + z_{0,95}\sqrt{\frac{16}{36}}, +\infty\right) = \left(40 + 1{,}65 \cdot \frac{4}{6}, +\infty\right) = (41{,}1, +\infty) \qquad \bar{x}_{36} = 40{,}7 \notin R \Rightarrow \text{accetto } H_0$$

3. Si ottiene lo stesso risultato se l'ipotesi alternativa è $H_1 \neq 40$?

$$R = \left(-\infty, 40 - 1{,}96\,\frac{4}{6}\right) \cup \left(40 + 1{,}96\,\frac{4}{6}, +\infty\right) = (-\infty, 38{,}69) \cup (41{,}31, +\infty)$$

$\bar{x} = 40{,}7 \notin R$, anche in questo caso accetto H_0

4. Come varia la regione di rifiuto (calcolata nel punto 2.), se il livello del test è del 1%?

$$R_{1\%} = \left(-\infty, 40 - 2{,}58\sqrt{\frac{16}{36}}\right) \cup \left(40 + 2{,}58\sqrt{\frac{16}{36}}, +\infty\right)$$

è contenuta in $R_{5\%}$

6

Esercizio 6:

Da uno studio condotto su un campione di ~~1423~~ 1145 individui di 32 anni,di cui 849 sono primogeniti, si è appurato che ben 115 sono in possesso di una laurea e 543 si sono fermati al diploma di scuola superiore. Dei rimanenti, 84 possiedono una laurea, mentre il numero di coloro che si sono fermati al diploma di scuola superiore è 403.

1. Costruire una tabella che riassuma i dati

	LAUREA	DIPLOMA	tot
PRIMOGENITI	115	543	658
NON PRIMOGENITI	84	403	487
totale	199	946	1145

2. I dati osservati permettono di desumere l'indipendenza tra primogenitura e grado di istruzione?

Tabella dati "atten"

	LAUREA	DIPLOMA	
PRIM.	114	544	
NON PRIM	85	402	

$$C = \frac{(114-115)^2}{114} + \frac{(544-543)^2}{544} + \frac{(85-84)^2}{85} + \frac{(402-403)^2}{402} =$$

$$= 0{,}025$$

$$\chi^2_{5\%}(1) = 3.8415$$

$C < \chi^2_{0{,}05}(1) \Rightarrow$ accetto l'Hp di indipendenza