

Cognome e Nome _____

Numero matricola _____ Firma _____

ESERCIZIO 1

Il peso alla nascita dei neonati di un certo ospedale è modellabile con una variabile aleatoria T di legge normale con media 3.250 kg e scarto di 0.2 kg.

a) Calcolare $P(T < 3.5 \text{ kg})$

$$P(T < 3,5) = P\left(Z < \frac{3,5 - 3,25}{0,2}\right) = P(Z < 1,25) = 0,8944$$

b) Calcolare $P(3.1 < T < 3.5 \text{ kg})$

$$\begin{aligned} P(3,1 < T < 3,5) &= 1 - P(T \leq 3,1) - P(T \geq 3,5) = 1 - P(T \leq 3,1) - [1 - P(T < 3,5)] = \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{3,1 - 3,25}{0,2}\right) - [1 - P\left(Z < \frac{3,5 - 3,25}{0,2}\right)] = 1 - P(Z \leq -0,75) - (1 - 0,8944) = \\ &= 1 - 0,2266 - 0,1056 = 0,6678 \end{aligned}$$

c) Determinare il valore di t in modo che $P(T > t \text{ kg}) = 0.2$.

$$P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - P\left(Z \leq \frac{t - 3,25}{0,2}\right) = 0,2$$

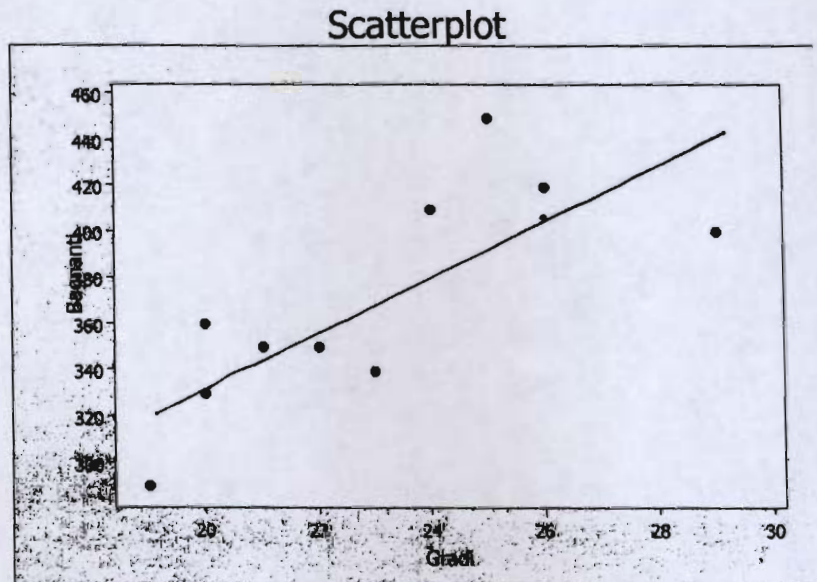
$$P\left(Z \leq \frac{t - 3,25}{0,2}\right) = 0,8 \quad \text{per cui}$$

$$\frac{t - 3,25}{0,2} = 0,84 \quad t - 3,25 = 0,168 \quad t = 3,418$$

ESERCIZIO 2

La tabella seguente riporta il numero di bagnanti in una piscina scoperta e la temperatura massima rilevata in 10 giorni estivi.

Bagnanti	Gradi
290	19
340	23
360	20
410	24
350	21
420	26
330	20
450	25
350	22
400	29



Variabile	Media	StDev
Bagnanti	370	46
Gradi C	22,9	2,9
Covarianza = 106		

Scrivere l'espressione della retta di regressione della variabile bagnanti in funzione dei gradi di temperatura massima e disegnarla sullo scatterplot riportato sopra.

$$y = b_0 + b_1 x \quad \text{con} \quad b_1 = \frac{106}{(2,9)^2} = 12,6 \quad \text{e} \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 370 - 12,6(22,9) = 81,46$$

quindi la retta è $y = 81,46 + 12,6x$

essa passa per i punti $(20; 333,46)$ e $(26; 409,06)$

ESERCIZIO 3

La seguente tabella riporta i risultati ottenuti in una ricerca che voleva mettere in relazione il tipo di rete utilizzata e la specie di pesce pescato.

Effettuare un test chi-quadrato a livello 5% per stabilire se le variabili rete e specie sono indipendenti.

Tabella valori osservati

	Specie A	Specie B	totale
Rete 1	22	10	32
Rete 2	28	15	43
Rete 3	12	15	27
totale	62	40	102

Tabella valori attesi

	Specie A	Specie B
Rete 1	19,5	12,5
Rete 2	26,1	16,9
Rete 3	16,4	10,6

$$C = \frac{(22 - 19,5)^2}{19,5} + \frac{(10 - 12,5)^2}{12,5} + \frac{(28 - 26,1)^2}{26,1} + \frac{(15 - 16,9)^2}{16,9} + \frac{(12 - 16,4)^2}{16,4} + \frac{(15 - 10,6)^2}{10,6} = 0,32 + 0,5 + 0,14 + 0,21 + 1,2 + 1,82 = 4,19$$

$$R = (C_{0,05}^2; +\infty) = (5,99; +\infty)$$

$C \notin R$ per cui X e Y sono indipendenti.

ESERCIZIO 4

Vengono effettuate $n=300$ misurazioni relative a confezioni di pasta. Si ottengono i seguenti risultati: $\bar{x}_{300} = 499,74g, s_{300} = 2.5g$.

a) Determinare l'intervallo di confidenza per la media a livello 95%.

$$IdC : \left(\bar{X}_{300} - t_{\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X}_{300} + t_{\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

n grande $\Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: in questo caso $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,975} = 1,96$

$$IdC : \left(499,74 - 1,96 \frac{2,5}{\sqrt{300}}, 499,74 + 1,96 \frac{2,5}{\sqrt{300}} \right) \cong (499,46, 500,02)$$

b) Effettuare un test per la media con $H_0 : \mu = 500g, H_1 : \mu < 500g$ a livello 5%.

$$\text{Regione di rifiuto } R = \left(-\infty, 500 - \underset{\uparrow}{1,64} \frac{2,5}{\sqrt{300}} \right) =$$

$$z_{1-\alpha} = z_{0,95}$$

$$= (-\infty; 499,76)$$

$$\bar{x}_{300} = 499,76 \in R \Rightarrow \text{si rifiuta } H_0$$

c) Effettuare un test per la media con $H_0 : \mu = 500g, H_1 : \mu \neq 500g$ a livello 5%.

$$R = \left(-\infty, 500 - \underset{\uparrow}{1,96} \frac{2,5}{\sqrt{300}} \right) \cup \left(500 + 1,96 \frac{2,5}{\sqrt{300}}, +\infty \right) =$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,975}$$

$$= (-\infty, 499,72) \cup (500,28, +\infty)$$

$$\bar{x}_{300} = 499,74 \notin R \Rightarrow \text{si accetta } H_0$$

ESERCIZIO 5

Vengono rilevati i pesi alla nascita di 650 bambini suddivisi le madri fumatrici (200) e non fumatrici (450).

Si ottengono i seguenti risultati :

- Peso medio bambini con madre fumatrice : 3.215 kg
- Peso medio bambini con madre non fumatrice : 3.285 kg

Calcolare il peso medio alla nascita dei 650 bambini.

$$\bar{x} = \frac{3,215(200) + 3,285(450)}{650} = 3,26$$

ESERCIZIO 7

Sia X una variabile aleatoria di legge uniforme su $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

a) Scrivere la legge di X .

$$X \sim U\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n^2-1}{12}\right) \Rightarrow$$

$$X \sim U(3, 2) \quad \begin{array}{c|ccccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline P(X) & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}$$

b) Calcolare media e varianza di X .

$$\bar{x} = \frac{n+1}{2} = 3 \quad \text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12} = 2$$

c) Calcolare $P(X > 4)$.

$$P(X > 4) = P(X = 5) = \frac{1}{5}$$

ESERCIZIO 8

Siano X_1, X_2, X_3 e X_4 variabili aleatorie indipendenti di legge $N(2,2)$.

a) Determinare la legge di $T = X_1 + X_2$.

$$T = X_1 + X_2 \sim N(4, 4)$$

In generale se X_1 e X_2 sono indipendenti
 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

b) Quale è la legge di $V = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}\right) = 2$$

$$\text{VAR}(V) = \frac{\text{VAR}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)}{16} = \frac{\text{VAR}(X_1) + \text{VAR}(X_2) + \text{VAR}(X_3) + \text{VAR}(X_4)}{16} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 9

Si estraggono 14 palline con rimpiazzo da una scatola che contiene 3 palline Rosse e 9 palline Blu.

a) Calcolare la probabilità di ottenere 6 palline Rosse.

$$\mathbb{P}(X=6) = \binom{14}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^8 = 0,07$$

$$X \sim B\left(14, \frac{1}{4}\right)$$

↑
P di successo (3 su 12)

←
P di insuccesso

b) Calcolare la probabilità di ottenere 9 palline Blu.

$$\mathbb{P}(Y=9) = \binom{14}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^9 \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0,147$$

$$Y \sim B\left(14, \frac{3}{4}\right)$$

c) Calcolare la probabilità di ottenere almeno 10 palline Rosse (solo la formula).

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) =$$
~~$$1 - \binom{10}{0} \frac{1^0}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - \binom{10}{1} \frac{1^1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^9 - \dots - \binom{10}{9} \frac{1^9}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^1 -$$~~

$$P(X \geq 10) = \sum_{k=10}^{14} \binom{14}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{14-k}$$

ESERCIZIO 10

La tabella seguente, derivata da un'indagine dell'ISTAT sulle condizioni di salute su un campione della popolazione italiana nel 1980, classifica i 45397 soggetti considerati : per eta' e per "abitudine al fumo".

ABITUDINE AL FUMO PER CLASSE DI ETA'				
CLASSI DI ETA' (ANNI)	FUMATORI	EX FUMATORI	NON FUMATORI	TOTALE
20-29	4359	164	8396	12919
30-39	3439	249	3915	7603
40-49	2975	374	4252	7601
50-59	2738	545	4169	7452
60-69	1588	666	3415	5669
70-79	722	520	2911	4153
TOTALE	15821	2518	27058	45397

a) Ci sono differenze fra le distribuzioni di fumatori e non fumatori rispetto alle classi di eta' (profili colonna) e disegnarne i grafici a barre sul retro del foglio.

CLASSI DI ETA' (ANNI)	FUMATORI	NON FUMATORI
20-29	0,28	0,31
30-39	0,22	0,14
40-49	0,18	0,16
50-59	0,17	0,15
60-69	0,1	0,13
70-79	0,045	0,11
TOTALE	1	1